UNIWERSYTET WROCŁAWSKI

WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I CHEMII

INSTYTUT MATEMATYKI

Małgorzata Trzebinda

HIPOTEZA BERMANA, LIEBERMANA I ROSSA

Praca magisterska

napisana pod kierunkiem

doc.dr hab. Tomasza Rolskiego

Wrocław 1987

SPIS TREŚCI

I. WSTĘP .

Załóżmy , że system składający się z n uporządkowanych liniowo , połączonych ze sobą elementów ulega awarii wtedy , kiedy psuje się k kolejnych elementów . Elementowi i-temu (dla i = I,...,n) odpowiada prawdopodobieństwo $p_i \in (0,I)$ zdarzenia , że nie ulegnie on awarii (niezawodność i-tego elementu) . Prawdopodobieństwo zdarzenia , że system nie ulegnie awarii oznaczmy P_k^n (niezawodność systemu) . Określony w ten sposób system nazwiemy systemem liniowym „k kolejnych spośród n" . Pojęcie to wprowadzili w [3] D.T.Chiang i S.C.Niu , którzy także wskazali jego związek z telekomunikacją i systemem rurociągów naftowych . R.C.Bollinger i A.A.Salvia zauważyli w [4] , że system ten często pojawia się w układach scalonych . W celu zilustrowania tego pojęcia rozważmy system „2 spośród 4" . Niech X_i = = I (dla i = I,2,3,4) oznacza , że element i-ty pracuje oraz X_i = 0 - przeciwnie . Wtedy zdarzenie polegające na tym , że system uległ awarii można opisać przy pomocy następujących czwórek (X_I,X_2,X_3,X_4) : (I,I,0,0),(I,0,0,0),(I, ,0,0,I),(0,0,0,0),(0,0,0,I),(0,0,I,0),(0,0,I,I) .

Dla systemów „k spośród n" rozważa się problem dotyczący takiego sposobu łączenia elementów , by prawdopodobieństwo awarii systemu było minimalne , przy czym rozpatruje się dwa warianty (w obu dla ustalenia uwagi zakładamy , że niezawodności elementów , którymi dysponujemy do zbudowania systemu spełniają warunek $p_I < p_2 < \ldots < p_n$) . Pierwszy , to problem ciągłej optymalizacji odpowiadający sytuacji , w której elementy są pojedyńczo przydzielane do kolejnych pozycji systemu i dopiero w momencie użycia elementu dowiadujemy się , czy element jest uszkodzony czy nie . C. Derman , G.J.Lieberman i S.M.Ross udowodnili w [I] , że dla k=2 optymalny jest następujący sposób określania uporządkowania elementów :

(i) pierwszym elementem , którego użyjemy jest I ,

(ii) jeżeli element (r-I) , którego użyliśmy psuje się , to kolejnym (czyli r-tym) , który przydzielimy do systemu będzie element o największej niezawodności ze wszystkich pozostałych (to znaczy tych , które jeszcze nie były przydzielane) ,

(iii) jeżeli przeciwnie , element (r-I) pracuje , to kolejnym , którego użyjemy będzie element o najmniejszej niezawodności z pozostałych .

W drugim wariancie (problem nieciągłej optymalizacji, którym zajmujemy się w tej pracy) zakładamy , że elementy systemu łączymy równocześnie . Wtedy niezawodność systemu zależy od jego uporządkowania i istotą problemu jest znalezienie spośród wszystkich możliwych porządków (permutacji) systemu tych , które maksymalizują wartość P_k^n .

W rozdziale 2 udowadniamy wzory umożliwiające obliczenie niezawodności systemu dla dowolnych k i n . W rozdziale 3 formułujemy szczegółowe założenia problemu nieciągłej optymalizacji . Podrozdział 3.I dotyczy przypadku k=2 . Podajemy w nim permutacje optymalne dla $n\leqslant 4$ oraz hipotezę Dermana , Liebermana i Rossa o permutacji optymalnej dla $n\geqslant 4$. W podrozdziale 3.2 zajmujemy się przypadkiem $k\geqslant\frac{n}{2}$ i podajemy permutacje optymalne dla n=k+I i n=k+2 . Korzystając z twierdzenia Y.L.Tonga,[2] dowodzimy faktów , których konsekwencją jest redukcja problemu nieciągłej optymalizacji systemów „k spośród n", gdy $\frac{n}{2} \leqslant k < n-1$, do tegoż problemu dla systemów „i spośród 2i", gdzie $i > 1$. W rozdziale 4 rozpatrujemy systemy „i spośród 2i" i pokazujemy , że dla $i=3$ istnieje dokładnie 10 permutacji (to jest 5 wraz z symetrycznymi do nich) takich , że każda jest optymalna dla pewnego układu niezawodności elementów . Zawarte w tym rozdziale przypuszczenie jest próbą uogólnienia przypadku $i=3$. W rozdziałach 2,3 i 4 podane są oryginalne rezultaty poza wysłowieniem Twierdzeń 2.2,3.1.1 i 3.1.2 , których dowody są własne . Natomiast wysłowienie i dowód Twierdzenia 3.2.2 należy do Tonga .

2. NIEZAWODNOŚĆ SYSTEMU „K SPOŚRÓD N".

Niech $p_I,\dots,p_n \in (0,I)$ oznaczają niezawodności kolejnych elementów rozważanego systemu, $q_i = I-p_i$ (dla $i = I,\dots,n$), P_k^n oznacza niezawodność systemu, $Q_k^n = I-P_k^n$. Oczywiście $Q_n^n = q_I\cdot\ldots\cdot q_n$ i $Q_I^n = I-p_I\cdot\ldots\cdot p_n$. Obliczenie niezawodności systemu w przypadku, gdy $I<k<n$ umożliwia następujące

Twierdzenie 2.I

$$(I)\qquad Q_k^n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n<k \\ q_I\cdot\ldots\cdot q_n & \text{dla } n=k \\ Q_k^{n-I} + p_{n-k}q_{n-k+I}\cdot\ldots\cdot q_n\left(I-Q_k^{n-k-I}\right) & \text{dla } n>k \end{cases}.$$

Dowód. Dla $n<k$ i $n=k$ wzór (I) jest oczywisty. Załóżmy, że $n>k$. Jeżeli $k=I$, to

$$Q_I^{n-I} + p_{n-I}q_n(I-Q_I^{n-2}) = I-p_I\cdot\ldots\cdot p_{n-I}+p_{n-I}q_n(I-I+ +p_I\cdot\ldots\cdot p_{n-2}) = I-p_I\cdot\ldots\cdot p_n = Q_I^n .$$

Niech $k>I$. Zdefiniujmy następujące zdarzenia :

A_k^m - wystąpiła awaria przynajmniej k kolejnych elementów systemu spośród $I,\dots,m$,

$\bar{A}_k^m$ - zaszło zdarzenie przeciwne do A_k^m,

$A_k(i)$ - uległo awarii przynajmniej k kolejnych elementów począwszy od i-tego,

$t(i)$ - element i-ty pracuje,

$\bar{t}(i)$ - element i-ty uległ awarii.

Mamy [illegible]:

$$P[t(i)] = p_i \ , \ P[A_k(i)] = P[\bigcap_{j=i}^{i+k-I} \bar{t}(j)] = \prod_{j=i}^{i+k-I} q_j \ ,$$

gdyż zdarzenia $t(i),\dots,t(i+k-I)$ są niezależne . Zauważmy , że

$$A_k^n = A_k(I) \cup [t(I) \cap A_k(2)] \cup \bigcup_{i=2}^{n-k} [t(i) \cap A_k(i+I) \cap \bar{A}_k^{i-I}] \ .$$

Zdarzenia $A_k(I), t(I)\cap A_k(2), t(2)\cap A_k(3)\cap \bar{A}_k^I, \dots, t(n-k)\cap A_k(n-k+I)\cap \bar{A}_k^{n-k-I}$ są rozłączne , zatem

$$Q_k^n = P(A_k^n) = P[A_k(I)] + P[t(I)\cap A_k(2)] + \sum_{i=2}^{n-k} P[t(i)\cap A_k(i+I)\cap$$
$$\cap \bar{A}_k^{i-I}] = P[A_k(I)] + P[t(I)\cap A_k(2)] + \sum_{i=2}^{n-k-I} P[t(i)\cap A_k(i+I)\cap$$
$$\cap \bar{A}_k^{i-I}] + P[t(n-k)\cap A_k(n-k+I)\cap \bar{A}_k^{n-k-I}] = P(A_k^{n-I}) + P[t(n-k)\cap$$
$$\cap A_k(n-k+I)\cap \bar{A}_k^{n-k-I}] = Q_k^{n-I} + P[t(n-k)]\, P[A_k(n-k+I)]\, P[$$
$$\bar{A}_k^{n-k-I}] \ ,$$

gdyż zdarzenia $t(n-k), A_k(n-k+I), \bar{A}_k^{n-k-I}$ są niezależne . Ostatecznie otrzymujemy

$$Q_k^n = Q_k^{n-I} + p_{n-k} q_{n-k+I} \cdot \ldots \cdot q_n (I - Q_k^{n-k-I}) \ .$$

Uwaga 2.I

W obliczeniach Q_k^n nieistotne jest , który ze skrajnych elementów systemu uznamy za pierwszy . Jeśli więc elementy o niezawodnościach $p_I,\dots,p_n$ przestawimy w ten sposób , że w nowym systemie $\bar{p}_I = p_n, \bar{p}_2 = p_{n-I}, \dots, \bar{p}_n = p_I$, to wartość Q_k^n nie ulegnie zmianie .

Twierdzenie 2.2(Tong,[2]).

Jeżeli $\frac{n}{2} \leqslant k < n$, to

$$(2) \qquad Q_k^n = \prod_{i=I}^{k} q_i + \sum_{j=2}^{n-k+I} \left(p_{j-I} \prod_{i=j}^{j+k-I} q_i \right) .$$

Dowód(indukcyjny). Na podstawie (I) otrzymujemy związki

$$k < n \Rightarrow Q_k^n = Q_k^{n-I} + p_{n-k} q_{n-k+I} \cdot \ldots \cdot q_n (I - Q_k^{n-k-I})$$

$$\frac{n-I}{2} < \frac{n}{2} \leqslant k \Rightarrow n-k-I < k \Rightarrow Q_k^{n-k-I} = 0 .$$

Stąd

$$(3) \qquad Q_k^n = Q_k^{n-I} + p_{n-k} q_{n-k+I} \cdot \ldots \cdot q_n .$$

Niech $n=k+I$. Z (I) wynika

$$(4) \qquad Q_k^{k+I} = Q_k^k + p_I q_2 \cdot \ldots \cdot q_{k+I} = \prod_{i=I}^{k} q_i + \sum_{j=2}^{k+I-k+I} \left(p_{j-I} \cdot \prod_{i=j}^{j+k-I} q_i \right) .$$

Załóżmy , że

$$(5) \qquad Q_k^n = \prod_{i=I}^{k} q_i + \sum_{j=2}^{n-k+I} \left(p_{j-I} \prod_{i=j}^{j+k-I} q_i \right) .$$

Wtedy z (3) i (4) wynika

$$(6) \qquad Q_k^{n+I} = Q_k^n + p_{n-k+I} q_{n-k+2} \cdot \ldots \cdot q_{n+I} = \prod_{i=I}^{k} q_i + \sum_{j=2}^{n-k+I} \left(p_{j-I} \cdot \prod_{i=j}^{j+k-I} q_i \right) + p_{n-k+I} q_{n-k+2} \cdot \ldots \cdot q_{n+I} = \prod_{i=I}^{k} q_i + \sum_{j=2}^{n+I-k+I} \left(p_{j-I} \cdot \prod_{i=j}^{j+k-I} q_i \right) .$$

Na podstawie (4),(5),(6) i zasady indukcji otrzymujemy (2

Wniosek 2.I

Rozważmy dwa systemy : „k spośród n" oraz „k spośród (n-I)" , który powstał z poprzedniego przez zabranie elementu z n-tego miejsca. Niech także $n \geqslant k$. Wówczas $Q_k^{n-I} < Q_k^n$.

Dowód. Na podstawie (I) mamy

$$Q_k^n - Q_k^{n-I} = \begin{cases} q_I \cdot \ldots \cdot q_n & \text{dla } n=k \\ p_{n-k} q_{n-k+I} \cdot \ldots \cdot q_n \left(I - Q_k^{n-k-I} \right) & \text{dla } n > k \end{cases} ,$$

zawsze więc

$$Q_k^n - Q_k^{n-I} > 0 .$$

Wniosek 2.2

$$Q_{k+I}^n < Q_k^n .$$

Dowód. Jeżeli zaszło zdarzenie A_{k+I}^n , to tym bardziej zaszło A_k^n . Wnioskujemy stąd , że $A_{k+I}^n \subset A_k^n$. A ponieważ $A_k^n \neq A_k^n$ (zdarzenie polegające na tym , że dokładnie k kolejnych elementów systemu uległo wawarii zawiera się w A_k^n , a nie zawiera się w A_{k+I}^n) , przeto otrzymujemy

$$P(A_{k+I}^n) = Q_{k+I}^n < P(A_k^n) = Q_k^n .$$

3. PROBLEM NIECIĄGŁEJ OPTYMALIZACJI .

W tym rozdziale przyjmiemy następujące założenia . Niech $p_1,\ldots,p_n \in (0,1)$ oznaczają niezawodności elementów , którymi dysponujemy do zbudowania systemu „k spośród n". Załóżmy , że $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Rozważmy sytuację , gdy n elementów łączymy równocześnie w porządku , który określa permutacja $\Pi = (\Pi(1),\ldots,\Pi(n))$ tak , że element $\Pi(i)$ znajduje się na i-tym miejscu w systemie . Problem polega na znalezieniu permutacji optymalnej , to znaczy takiej , która maksymalizuje niezawodność systemu P_k^n (minimalizuje Q_k^n) . Oznaczmy niezawodność systemu odpowiadającego permutacji Π przez $P_k^n(\Pi)$, $Q_k^n(\Pi) = 1-P_k^n(\Pi)$, niezawodności elementów przez $p_{\Pi(1)},\ldots,p_{\Pi(n)}$, $q_{\Pi(i)} = 1-p_{\Pi(i)}$ (dla $i=1,\ldots,n$) .

3.1 HIPOTEZA DERMANA , LIEBERMANA I ROSSA .

Rozważmy problem nieciągłej optymalizacji dla k=2 . Jeżeli n=2 , to obie możliwe permutacje są optymalne .

<u>Twierdzenie 3.1.1</u>

Permutacja Π jest optymalna dla systemu „2 spośród 3" $\Leftrightarrow \Pi \in \{(1,3,2),(2,3,1)\}$.

<u>Dowód.</u> Dla k=2 i n=3 wzór (2) przyjmie postać

$$Q_2^3(\Pi) = q_{\Pi(1)}q_{\Pi(2)} + p_{\Pi(1)}q_{\Pi(2)}q_{\Pi(3)} = q_{\Pi(2)}(q_{\Pi(1)} + q_{\Pi(3)}) - q_{\Pi(1)}q_{\Pi(2)}q_{\Pi(3)} .$$

Wynika stąd

$$Q_2^3[(1,2,3)] - Q_2^3[(1,3,2)] = q_2(q_1+q_3) - q_3(q_1+q_2) = q_1(q_2-q_3) > 0 \tag{7}$$

(8) $\quad Q_2^3[(2,1,3)]-Q_2^3[(1,3,2)] = q_2(q_1-q_3) > 0$.

W myśl Uwagi 2.I mamy

(9) $\quad Q_2^3[(1,3,2)] = Q_2^3[(2,3,1)]\ ,\ Q_2^3[(1,2,3)] = Q_2^3[(3,2,1)]\ ,$

$$Q_2^3[(2,1,3)] = Q_2^3[(3,1,2)]\ .$$

Na podstawie (7),(8) i (9) otrzymujemy , że jedynymi optymalnymi permutacjami dla systemu „2 spośród 3" są permutacje $(1,3,2)$ i $(2,3,1)$.

Twierdzenie 3.I.2

Permutacja jest optymalna dla systemu „2 spośród 4" $\Leftrightarrow \pi \in \{(1,4,3,2),(2,3,4,1)\}$.

Dowód. Podstawiając $k=2$ i $n=4$ do wzoru (2) otrzymujemy

$$Q_2^4(\pi) = q_{\pi(1)}q_{\pi(2)}+p_{\pi(1)}q_{\pi(2)}q_{\pi(3)}+p_{\pi(2)}q_{\pi(3)}q_{\pi(4)} =$$

$$= q_{\pi(1)}q_{\pi(2)}+q_{\pi(3)}q_{\pi(4)}+q_{\pi(2)}q_{\pi(3)}(1-q_{\pi(1)}-q_{\pi(4)})\ .$$

Ponieważ $q_1>q_2>q_3>q_4$; więc można przyjąć , że $q_4=a$, $q_3=a+b$, $q_2=a+b+c$, $q_1=a+b+c+d$, gdzie $a,b,c,d,(a+b+c+d)\in(0,$ Oznaczmy $A(\pi) = q_{\pi(1)}q_{\pi(2)}$, $B(\pi) = q_{\pi(3)}q_{\pi(4)}$, $C(\pi) = q_{\pi(2)}q_{\pi(3)}(1-q_{\pi(1)}-q_{\pi(4)})$. Rozważmy trzy przypadki :

(I°)

Dla każdej permutacji spośród : $\pi_1=(1,2,3,4)$, $\pi_2=(1,2,4,3)$ $\pi_3=(2,1,3,4)$, $\pi_4=(2,1,4,3)$, $\pi_5=(3,4,1,2)$, $\pi_6=(3,4,2,1)$, $\pi_7=(4,3,1,2)$, $\pi_8=(4,3,2,1)$ suma $A(\pi)+B(\pi)$ ma tę samą wartość . Na podstawie Uwagi 2.I niezawodność systemu jest ta sama odpowiednio dla π_1 i π_8 , π_2 i π_6 , π_3 i π_7 , π_4 i π_5 , zatem wystarczy porównać wartości $Q_2^4(\pi)$ dla π_1,π_2,π_3,π_4 .

mamy

(10) $C(\Pi_1)=(a+b+c)(a+b)(1-a-b-c-d-a) > C(\Pi_2)=(a+b+c)a\cdot$
$\cdot(1-a-b-c-d-a-b)$

(11) $C(\Pi_3)=(a+b+c+d)(a+b)(1-a-b-c-a) > C(\Pi_4)=(a+b+c+d)\cdot$
$\cdot a(1-a-b-c-a-b)$

(12) $C(\Pi_2) < C(\Pi_4)$.

Z (10),(11) i (12) wynika , że wyrażenie $C(\Pi)$, a więc i $Q_2^4(\Pi)$ jest najmniejsze dla permutacji Π_2 i Π_6 .

(2°)

Rozważając (analogicznie jak w (1°)) permutacje : $\Pi_9=(1,4,2,3)$, $\Pi_{10}=(1,4,3,2)$, $\Pi_{11}=(4,1,2,3)$, $\Pi_{12}=(4,1,3,2)$, $\Pi_{13}=(3,2,1,4)$ $\Pi_{14}=(3,2,4,1)$, $\Pi_{15}=(2,3,1,4)$, $\Pi_{16}=(2,3,4,1)$ otrzymujemy najmniejsze $Q_2^4(\Pi)$ dla Π_{10} i Π_{16} .

(3°)

Postępując jak wyżej , spośród pozostałych permutacji wybieramy $\Pi_{18}=(1,3,4,2)$ i $\Pi_{22}=(2,4,3,1)$.

Porównajmy teraz wartości $Q_2^4(\Pi_2)$, $Q_2^4(\Pi_{10})$ i $Q_2^4(\Pi_{18})$. Mamy

$$Q_2^4(\Pi_2)=(a+b+c+d)(a+b+c)+a(a+b)+(a+b+c)a(1-a-b-c-d-a-b)$$

$$Q_2^4(\Pi_{10})=(a+b+c+d)a+(a+b)(a+b+c)+a(a+b)(1-a-b-c-d-a-b-c)$$

$$Q_2^4(\Pi_{18})=(a+b+c+d)(a+b)+a(a+b+c)+(a+b)a(1-a-b-c-d-a-b-c) .$$

Wynika stąd , że

(13) $Q_2^4(\Pi_{18})-Q_2^4(\Pi_{10})= bd > 0$

(14) $Q_2^4(\Pi_2)-Q_2^4(\Pi_{18})=(1-a)c(a+b+c+d)+bd > 0$.

Z (13) i (14) wynika , że spośród $Q_2^4(\Pi_2)$, $Q_2^4(\Pi_{10})$ i $Q_2^4(\Pi_{18})$ najmniejszą wartość ma $Q_2^4(\Pi_{10})$. Zatem , na podstawie (1°), (2°) i (3°) jedynymi optymalnymi permutacjami systemu "2 spośród 4" są permutacje (1,4,3,2) i (2,3,4,1) .

Derman , Lieberman i Ross wyrazili w [I] następujące przypuszczenie dotyczące permutacji optymalnej dla systemu „2 spośród n":

<u>Hipoteza</u>

Dla $n \geqslant 4$ permutacja $\Pi=(I,n,3,\ldots,4,n-I,2)$ jest optymalną permutacją systemu „2 spośród n".

Tong podał w [2] informację , że F.Hwang i B.Griffith powiadomili go o tym , że hipoteza ta okazała się prawdziwa i dwa niezależne dowody znajdują się w następujących artykułach : Du,D.Z. i Hwang,F.K.(1985) Optimal consecutive 2-out-of-n system,Math.Operat.Res.(Ma się pojawić w druku) , Malon,D.M.(1983) Optimal consecutive 2-out-of-n : F component sequencing(Nie opublikowane) . Niestety , nie udało mi się dotrzeć do źródeł tej informacji .

3.2 TWIERDZENIE TONGA .

Będziemy zajmować się przypadkiem $k \geqslant \frac{n}{2}$.

<u>Twierdzenie 3.2.I</u>

Niech $k>I$ i $\Pi=(\Pi(I),\ldots,\Pi(k+I))$. Wtedy permutacja Π jest optymalna dla systemu „k spośród (k+I)" $\Leftrightarrow$ $\{\Pi(I),\Pi(k+I)\} = \{I,2\}$.

<u>Dowód(a contario).</u>($\Rightarrow$) Ze wzoru (2) otrzymujemy

$$(15) \qquad Q_k^{k+I}(\Pi) = q_{\Pi(2)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(k)}\left(q_{\Pi(I)}+p_{\Pi(I)}q_{\Pi(k+I)}\right) =$$

$$= q_{\Pi(2)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(k)}\left(q_{\Pi(I)}+q_{\Pi(k+I)}-q_{\Pi(I)}q_{\Pi(k+I)}\right) .$$

[illegible] , co daje [illegible]

[illegible]

Niech permutacja π będzie optymalna dla systemu „k spośród (k+I)". Przypuśćmy, że $\{\pi(I),\pi(k+I)\} \neq \{I,2\}$. Wtedy zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości: $\{\pi(I),\pi(k+I)\} \cap \{I,2\} = \emptyset$, $\{\pi(I),\pi(k+I)\} \cap \{I,2\} = \{I\}$, $\{\pi(I),\pi(k+I)\} \cap \{I,2\} = \{2\}$. Rozważmy przypadki

(a)

Jeżeli $\{\pi(I),\pi(k+I)\} \cap \{I,2\} = \emptyset$, to przez π^* oznaczymy permutację powstałą z π przez zamianę miejsca I z tym, na którym znajduje się I, oraz miejsca (k+I) z tym, na którym znajduje się 2. Wtedy $\pi^*(I)=I$, $\pi^*(k+I)=2$. Ze wzoru (I5) wynika, że

$$Q_k^{k+I}(\pi^*) = \frac{q_{\pi(2)}\cdot\ldots\cdot q_{\pi(k)}}{q_I q_2} q_{\pi(I)} q_{\pi(k+I)} (q_I + q_2 - q_I q_2)$$

$$Q_k^{k+I}(\pi) = \frac{q_{\pi(2)}\cdot\ldots\cdot q_{\pi(k)}}{q_I q_2} q_I q_2 (q_{\pi(I)} + q_{\pi(k+I)} - q_{\pi(I)} q_{\pi(k+I)}).$$

Wtedy

$$Q_k^{k+I}(\pi) - Q_k^{k+I}(\pi^*) = \frac{q_{\pi(2)}\cdot\ldots\cdot q_{\pi(k)}}{q_I q_2}\Big[q_I q_{\pi(I)}(q_2 - q_{\pi(k+I)}) + q_2 q_{\pi(k+I)}(q_I - q_{\pi(I)})\Big] > 0,$$

gdyż $q_2 > q_{\pi(k+I)}$, $q_I > q_{\pi(I)}$. Zatem π nie jest optymalna, co daje sprzeczność.

(b)

Jeżeli $\{\pi(I),\pi(k+I)\} \cap \{I,2\} = \{I\}$, to przez π^* oznaczymy permutację powstałą z π przez zamianę miejsca, na którym znajduje się 2 z i-tym, gdzie $i \in \{I,k+I\}$, $\pi(i) \neq I$. Wtedy

$$Q_k^{k+I}(\pi) - Q_k^{k+I}(\pi^*) = \frac{q_{\pi(2)}\cdot\ldots\cdot q_{\pi(k)}}{q_2} q_i (q_2 - q_i) > 0,$$

gdyż $q_2 > q_i$. Zatem π nie jest optymalna, co daje sprzeczność.

(c)

Jeżeli $\{\pi(I),\pi(k+I)\}\cap\{I,2\}=\{2\}$, to przez π^* oznaczymy permutację powstałą z π przez zamianę miejsca , na którym znajduje się I z i-tym , gdzie $i\in\{1,k+I\}$, $\pi(i)\neq 2$. Wtedy

$$Q_k^{k+I}(\pi) - Q_k^{k+I}(\pi^*) = \frac{q_{\pi(2)}\cdot\ldots\cdot q_{\pi(k)}}{q_I} q_2(q_I - q_i) > 0 ,$$

gdyż $q_I > q_i$. Zatem π nie jest optymalna , co daje sprzeczność .

Na podstawie (a),(b) i (c) wnioskujemy , że $\{\pi(I),\pi(k+I)\} = \{I,2\}$.

($\Leftarrow$) Niech $\pi=(\pi(I),\ldots,\pi(k+I))$ będzie permutacją , dla której $\{\pi(I),\pi(k+I)\}=\{I,2\}$. Przypuśćmy , że π nie jest optymalna . Wtedy istnieje optymalna permutacja π^* taka , że $\pi^*\neq\pi$ i $Q_k^{k+I}(\pi) > Q_k^{k+I}(\pi^*)$. Z poprzedniej części dowodu mamy , że $\{\pi^*(I),\pi^*(k+I)\}=\{I,2\}$, ale wtedy na podstawie (I5) jest spełniona równość $Q_k^{k+I}(\pi) = Q_k^{k+I}(\pi^*)$, co daje sprzecznpść . Zatem π jest optymalna .

<u>Przykład 3.2.I</u>

Dla systemu „3 spośród 4" optymalnymi są permutacje (I,3,4,2), (I,4,3,2),(2,3,4,I),(2,4,3,I) .

<u>Przykład 3.2.2</u>

Dla systemu „4 spośród 5" istnieje 2(5-2)!=I2 optymalnych permutacji . Są to : (I,3,4,5,2),(I,3,5,4,2),(I,4,3,5,2),(I,4,5,3,2),(I,5,3,4,2),(I,5,4,3,2),(2,3,4,5,I),(2,3,5,4,I),(2,4,3,5,I),(2,4,5,3,I),(2,5,3,4,I),(2,5,4,3,I) . Ogólnie , dla systemu „k spośród (k+I)", gdzie $k>1$, istnieje 2(k-I)! optymalnych permutacji .

Znalezienie optymalnych permutacji dla systemu „k spośród n", gdy $n>4$ i $k<n-I$, nie jest łatwe. Trudno jest podać jakąś ogólną zasadę, udowodnić ją (jak na przykład dla $k=2$), łatwiej wykorzystując wzory na niezawodność systemu wyciągnąć wnioski z obliczeń dla konkretnych wartości $n,k,p_I,\dots,p_n$. Jednak rezultaty liczbowe nie zawsze w sposób jednoznaczny mogą wskazać optymalną permutację. Tong w [2] zwrócił uwagę, że dla $k\geq\frac{n}{2}$ optymalna permutacja czasami zmienia się, kiedy wartości p_i zmieniają się. Poniżej przytaczam z pewną modyfikacją (ze względu na założenia problemu nieciągłej optymalizacji) oraz drobną poprawką (w wersji Tonga było założenie $k\geq\frac{n}{2}$, co jest błędem, gdyż wtedy dla $k=\frac{n}{2}$ i $j=k=n-k$ warunki (I6) i (I8) wykluczają się) zawarte w jego pracy twierdzenie, które okazuje się bardzo użyteczne przy znajdywaniu optymalnych permutacji w przypadku $k>\frac{n}{2}$.

Twierdzenie 3.2.2

Niech $k>\frac{n}{2}$. Dla dowolnej permutacji $\Pi=(\Pi(I),\dots,\Pi(n))$ oraz $j<n$ zdefiniujmy następującą permutację $\Pi^{(j)}=(\Pi(I),\dots,\Pi(j-I),\Pi(j+I),\Pi(j),\Pi(j+2),\dots,\Pi(n))$. Jeżeli $\Pi(j)>\Pi(j+I)$, to

(I6) $\quad Q_k^n(\Pi) > Q_k^n(\Pi^{(j)}) \quad$ dla $j\leq n-k$

(I7) $\quad Q_k^n(\Pi) = Q_k^n(\Pi^{(j)}) \quad$ dla $n-k+I\leq j\leq k-I$

(I8) $\quad Q_k^n(\Pi) < Q_k^n(\Pi^{(j)}) \quad$ dla $j\geq k$.

Jeżeli $\Pi(j)<\Pi(j+I)$, to nierówności w (I6) i (I8) są odwrócone, (I7) pozostaje bez zmian.

Dowód. Załóżmy , że $\Pi(j) > \Pi(j+I)$. Wtedy , w myśl (2) dla $j < n-k$

$$Q_k^n(\Pi)-Q_k^n(\Pi^{(j)}) = \left(p_{\Pi(j)}q_{\Pi(j+I)}-p_{\Pi(j+I)}q_{\Pi(j)}\right)\prod_{i=j+2}^{j+k}q_{\Pi(i)}+$$

$$+\left(p_{\Pi(j+I)}-p_{\Pi(j)}\right)\prod_{i=j+2}^{j+k+I}q_{\Pi(i)} = \left(q_{\Pi(j+I)}-q_{\Pi(i)}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\prod_{i=j+2}^{j+k}q_{\Pi(i)}\right)p_{\Pi(j+k+I)} > 0$$

oraz dla $j=n-k$

$$Q_k^n(\Pi)-Q_k^n(\Pi^{(j)}) = \left(q_{\Pi(j+I)}-q_{\Pi(j)}\right)\prod_{i=j+2}^{n}q_{\Pi(i)} > 0 \ .$$

Dowód dla (I8) jest podobny . Równość (I7) jest oczywista , gdyż wszystkie składniki we wzorze na $Q_k^n(\Pi)$ zawierają $q_{\Pi(j)}q_{\Pi(j+I)}$ dla $n-k+I \leqslant j \leqslant k-I$. Kiedy $\Pi(j) < \Pi(j+I)$, to dla $j \leqslant n-k$ otrzymujemy $Q_k^n(\Pi)-Q_k^n(\Pi^{(j)}) < 0$, w konsekwencji czego nierówności w (I6) są odwrócone . Dowód w pozostałych przypadkach jest analogiczny .

<u>Uwaga 3.2.I</u>

Twierdzenie 3.2.2 zawiera intuicję , że niezawodność systemu wzrasta , gdy elementy o większej niezawodności są przesuwane bliżej środka systemu . Natomiast uporządkowanie elementów na miejscach $n-k+I,\ldots,k$ jest nieistotne dla niezawodności systemu .

Wprowadzimy teraz pewne oznaczenia , z których będziemy dalej korzystać . Niech $S_I=\left\{i_I,i_2,\ldots,i_{\left[\frac{I}{2}(n+I)\right]}\right\}$, $S_2=\left\{i_{\left[\frac{I}{2}(n+3)\right]},\ldots,i_n\right\}$ będzie dowolnym , lecz ustalonym podziałem zbioru $\{I,\ldots,n\}$ ($[t]$ jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą t) . Przez Γ oznaczmy klasę permutacji taka , że jeżeli $\pi=(\pi(I),\dots,\pi(n))$, to

$$\pi\in\Pi \Leftrightarrow \left\{\pi(I),\dots,\pi\left(\left[\tfrac{I}{2}(n+I)\right]\right)\right\} = S_I$$

(mamy $\left[\frac{I}{2}(n+I)\right]!\left(n-\left[\frac{I}{2}(n+I)\right]\right)!$ takich permutacji w Π) . Każdemu podziałowi S_I,S_2 odpowiada ściśle określona klasa Π .

Tong w [2] wywnioskował z Twierdzenia 3.2.2 , że dla $k\geqslant\frac{n}{2}$ permutacja $\pi^*=(\pi^*(I),\dots,\pi^*(n))\in\Pi$, która spełnia warunek $Q_k^n(\pi^*)=\min\limits_{\pi\in\Pi}(Q_k^n(\pi))$ jest postaci

(i) $\pi^*(I)<\pi^*(2)<\dots<\pi^*\left(\left[\frac{I}{2}(n+I)\right]\right)$

(ii) $\pi^*\left(\left[\frac{I}{2}(n+3)\right]\right)>\dots>\pi^*(n)$.

Wniosek ten jest błędny , gdyż na przykład permutacja (I,5,4,3,2) , która w myśl Twierdzenia 3.2.I jest optymalna (a zatem $Q_4^5[(I,5,4,3,2)]=\min\limits_{\pi\in\Pi}(Q_4^5(\pi))$, gdzie $\Pi\ni(I,5,4,3,2)$) , nie spełnia warunku (i) . Błąd w rozumowaniu Tonga polegał na sformułowaniu tezy , że powyższe warunki są konieczne (zamiast wystarczające) do tego , by była prawdziwa równość $Q_k^n(\pi^*)=\min\limits_{\pi\in\Pi}(Q_k^n(\pi))$.

<u>Twierdzenie 3.2.3</u>

Niech $k\geqslant\frac{n}{2}$ i $\pi^*=(\pi^*(I),\dots,\pi^*(n))\in\Pi$. Wtedy $Q_k^n(\pi^*)=\min\limits_{\pi\in\Pi}[Q_k^n(\pi)$

(I9) $\pi^*(I)<\pi^*(2)<\dots<\pi^*(n-k)<\pi^*(n-k+I)$

(20) $\pi^*(k)>\pi^*(k+I)>\dots>\pi^*(n)$

(21) $\pi^*(n-k)<\min\left\{\pi^*(n-k+I),\dots,\pi^*\left(\left[\frac{I}{2}(n+I)\right]\right)\right\}$

(22) $\pi^*(k+I)<\min\left\{\pi^*\left(\left[\frac{I}{2}(n+3)\right]\right),\dots,\pi^*(k)\right\}$.

<u>Dowód(a contario).</u> ($\Rightarrow$) Niech $Q_k^n(\pi^*)=\min\limits_{\pi\in\Pi}(Q_k^n(\pi))$. Przypuśćmy , że istnieje $j\in\{I,\dots,n-k\}$ takie , że $\pi^*(j)>\pi^*(j+I)$. Wtedy na podstawie (I6) mamy $Q_k^n(\pi^*)>Q_k^n(\pi^{*(j)})$, gdzie $\pi^{*(j)}\in\Pi$, co daje sprzeczność . Stąd wynika (I9) . Dowód dla (20)

jest podobny . Przypuśćmy , że istnieje $s\in\left\{n-k+1,\ldots,\left[\frac{1}{2}(n+1)\right]\right\}$ takie , że $\Pi^*(n-k)>\Pi^*(s)$. Przez $\tilde{\Pi}$ oznaczmy permutację powstałą z Π^* przez powtarzanie zamiany miejsc dwóch kolejnych elementów (z których jednym jest $\Pi^*(s)$, drugim jest jeden spośród $\left\{n-k+1,\ldots,\left[\frac{1}{2}(n+1)\right]\right\}$) odpowiednio tak , by w końcu otrzymać $\tilde{\Pi}(n-k+1)=\Pi^*(s)$. Na mocy (17) mamy $\min\limits_{\Pi\in\Pi}(Q_k^n(\Pi))=Q_k^n(\Pi^*)=$ $=Q_k^n(\tilde{\Pi})$ a stąd i z udowodnionego wcześniej warunku (19) dla $\tilde{\Pi}$ wynika , że $\Pi^*(n-k)=\tilde{\Pi}(n-k)<\tilde{\Pi}(n-k+1)=\Pi^*(s)$, co daje sprzeczność . Udowodniliśmy więc (21) . Analogicznie dowodzimy (22) .

($\Leftarrow$) Załóżmy , że permutacja $\Pi^*\in\Pi$ spełnia (19)-(22) . Przypuśćmy , że $Q_k^n(\Pi^*)>\min\limits_{\Pi\in\Pi}(Q_k^n(\Pi))=Q_k^n(\tilde{\Pi})$, gdzie $\tilde{\Pi}\in\Pi$ i $\tilde{\Pi}\neq\Pi^*$. Z poprzedniej części dowodu wynika , że również dla $\tilde{\Pi}$ prawdą jest (19)-(22) . Przypuśćmy , że $\{\Pi^*(1),\ldots,\Pi^*(n-k)\}\neq$ $=\{\tilde{\Pi}(1),\ldots,\tilde{\Pi}(n-k)\}$. Wtedy istnieje $t\in\{1,\ldots,n-k\}$ takie , że $\Pi^*(t)\in\left\{\tilde{\Pi}(n-k+1),\ldots,\tilde{\Pi}\left(\left[\frac{1}{2}(n+1)\right]\right)\right\}$. Na mocy warunku (21) dla $\tilde{\Pi}$ mamy $\tilde{\Pi}(n-k)<\Pi^*(t)$. Zdefiniujmy następujące zbiory : $A=\{s\in S_1:s<\tilde{\Pi}(n-k)\}$, $B=\{s\in S_1:s<\Pi^*(t)\}$. Z warunku (19) odpowiednio dla $\tilde{\Pi}$ i Π^* otrzymujemy , że $|A|=n-k-1$, $|B|<n-k$. Mamy też $\{A\cup\{\tilde{\Pi}(n-k)\}\}\subset B$. Zbiory $A,\{\tilde{\Pi}(n-k)\}$ są rozłączne , zatem $|A\cup\{\tilde{\Pi}(n-k)\}|=n-k-1+1=n-k\leqslant|B|<n-k$, co daje sprzeczność .Mamy więc

$$\{\Pi^*(1),\ldots,\Pi^*(n-k)\}=\{\tilde{\Pi}(1),\ldots,\tilde{\Pi}(n-k)\} .$$

Analogicznie dowodzimy faktu , że $\{\Pi^*(k+1),\ldots,\Pi^*(n)\}=\{\tilde{\Pi}(k+1),\ldots,\tilde{\Pi}(n)\}$. Ale wtedy , na mocy (17) (patrz Uwaga 3.2.1) otrzymujemy , że $Q_k^n(\Pi^*)=Q_k^n(\tilde{\Pi})$, co daje sprzeczność . Zatem $Q_k^n(\Pi^*)=\min\limits_{\Pi\in\Pi}(Q_k^n(\Pi))$.

Uwaga 3.2.2

Konsekwencją Twierdzenia 3.2.3 jest to, że w celu znalezienia optymalnych permutacji systemu „k spośród n", gdzie $k>\frac{n}{2}$, wystarczy wziąć pod uwagę wszystkie podziały zbioru $\{1,\dots,n\}$ i porównać te permutacje, które w klasach permutacji odpowiadających tym podziałom minimalizują $Q_k^n(\Pi)$.

Twierdzenie 3.2.4

Niech $k>i>1$ i $\Pi=(\Pi(1),\dots,\Pi(k+i))$. Wtedy permutacja Π jest optymalna dla systemu „k spośród $(k+i)$" $\Leftrightarrow$

(23) $\{\Pi(1),\dots,\Pi(i),\Pi(k+1),\dots,\Pi(k+i)\}=\{1,\dots,2i\}$

(24) $\widetilde{\Pi}=(\widetilde{\Pi}(1),\dots,\widetilde{\Pi}(2i))$, gdzie $\widetilde{\Pi}(1)=\Pi(1),\dots,\widetilde{\Pi}(i)=\Pi(i)$, $\widetilde{\Pi}(i+1)=\Pi(k+1),\dots,\widetilde{\Pi}(2i)=\Pi(k+i)$ jest permutacją optymalną dla systemu „i spośród $2i$".

Dowód. ($\Rightarrow$) Dla $k>i>1$ w myśl wzoru (2) (wtedy $k>\frac{k+i}{2}$) mamy

$$(25)\quad Q_k^{k+i}(\Pi)=q_{\Pi(1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(k)}+p_{\Pi(1)}q_{\Pi(2)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(k+1)}+\dots+p_{\Pi(i)}q_{\Pi(i+1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(i+k)}=q_{\Pi(i+1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(k)}\cdot$$
$$\cdot\left(q_{\Pi(1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(i)}+p_{\Pi(1)}q_{\Pi(2)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(i)}q_{\Pi(k+1)}+\dots+p_{\Pi(i)}q_{\Pi(k+1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(k+i)}\right)=q_{\Pi(i+1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(k)}\cdot Q_i^{2i}(\widetilde{\Pi}),$$

gdzie $Q_i^{2i}(\widetilde{\Pi})$ dotyczy systemu złożonego z elementów $\Pi(1),\dots,\Pi(i),\Pi(k+1),\dots,\Pi(k+i)$ rozważanego systemu. Niech permu- $\Pi_1\in\Pi$ będzie optymalna dla systemu „k spośród $(k+i)$". Przez R oznaczmy klasę permutacji Π, dla których $\{\Pi(i+1),\dots,\Pi(k)\}=\{\Pi_1(i+1),\dots,\Pi_1(k)\}$. Wtedy oczywiście $q_{\Pi(i+1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(k)}=q_{\Pi_1(i+1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi_1(k)}$. Permutacja Π_1 jako optymalna spełnia warunek

$$Q_i^{2i}(\Pi_I) = \min_{\Pi\in R} Q_i^{2i}(\Pi) ,$$

który na mocy (25) i określenia klasy R równoważny jest warunkowi

$$Q_i^{2i}(\widetilde{\Pi}_I) = \min_{\Pi\in R} Q_i^{2i}(\widetilde{\Pi}) .$$

Otrzymujemy stąd (24) . Przypuśćmy , że istnieje $s\in\{i+I,\ldots k\}$ takie , że $\Pi_I(i) > \Pi_I(s)$. Przez Π_2 oznaczmy permutację powstałą z Π_I przez powtarzanie zamiany miejsc dwóch kolejnych elementów (z których jednym jest $\Pi_I(s)$, drugim jest jeden spośród $\{i+I,\ldots,k\}$) odpowiednio tak , by w końcu otrzymać $\Pi_2(i+I)=\Pi_I(s)$. Na mocy (I6) i (I7) mamy $Q_k^{k+i}(\Pi_I) = Q_k^{k+i}(\Pi_2) > Q_k^{k+i}(\Pi_2^{(i)})$, co daje sprzeczność z założeniem optymalności Π_I . Udowodniliśmy w ten sposób , że $\Pi_I(i) < \min\{\Pi_I(i+I),\ldots,\Pi_I(k)\}$. Oczywiście $Q_k^{k+i}(\Pi_I)= \min_{\Pi\in\Pi} Q_k^{k+i}(\Pi)$ Na podstawie (I9) ostatecznie otrzymujemy , że

(26) $\Pi_I(I) < \Pi_I(2) < \ldots < \Pi_I(i) < \min\{\Pi_I(i+I),\ldots,\Pi_I(k)\}$.

Podobnie dowodzimy faktu , że

(27) $\Pi_I(k+i) < \ldots < \Pi_I(k+I) < \min\{\Pi_I(i+I),\ldots,\Pi_I(k)\}$.

Gdyby któraś z liczb I,...,2i nie leżała w zbiorze $\{\Pi_I(I),\ldots,\Pi_I(i),\Pi_I(k+I),\ldots,\Pi_I(k+i)\}$, wtedy leżałaby w nim jedna spośród 2i+I,...,k+i , gdyż rozważany zbiór ma dokładnie 2i elementów . A ponieważ pierwsza z rozpatrywanych liczb byłaby mniejsza od drugiej , więc otrzymalibyśmy sprzeczność z (26) lub (27) . Oczywistym jest wobec tego fakt (23) .

($\Leftarrow$) Niech Π będzie permutacją , dla której prawdą jest (23) i (24) . Przypuśćmy , że Π nie jest optymalna . Wtedy istnieje optymalna permutacja Π^* taka , że $\Pi^*=\Pi$ i $Q_k^{k+i}(\Pi^*) < Q_k^{k+i}(\Pi)$. Z poprzedniej części dowodu wynika , że dla Π^* mamy (23) i (24) , skąd na podstawie (25) otrzymujemy $Q_k^{k+i}(\Pi^*) = Q_k^{k+i}(\Pi)$ co daje sprzeczność . Zatem Π jest optymalna .

<u>Wniosek 3.2.I</u>

Niech $k>2$ i $\pi=(\pi(I),\ldots,\pi(k+2))$. Wtedy permutacja π jest optymalna dla systemu „k spośród k+2" $\Leftrightarrow$ $(\pi(I),\pi(2),\pi(k+I),\pi(k+2)) \in \{(I,4,3,2),(2,3,4,2)\}$.

<u>Dowód</u>. Wniosek ten wynika bezpośrednio z Twierdzeń 3.2.4 i 3.I.2 .

<u>Przykład 3.2.I</u>

Dla systemu „3 spośród 5" optymalnymi są permutacje (I,4,5,3,
(2,3,5,4,I) .

<u>Przykład 3.2.2</u>

Dla systemu „4 spośród 6" istnieje 2(6-4)!=4 optymalnych permutacji . Są to : (I,4,5,6,3,2),(I,4,6,5,3,2),(2,3,6,5,4,I) (2,3,5,6,4,I) . Ogólnie , dla systemu „k spośród k+2" , gdzie $k>2$, istnieje $2(k-2)!$ optymalnych permutacji .

<u>Uwaga 3.2.3</u>

Problem nieciągłej optymalizacji systemu „k spośród n", gdy $\frac{n}{2}<k<n-I$, na podstawie Twierdzenia 3.2.4 redukuje się do tegoż problemu dla systemu „(n-k) spośród 2(n-k)" $(n-k>I)$. Zatem celowe jest rozpatrzenie systemów „i spośród 2i", gdzi $i>I$.

4. SYSTEMY „I SPOŚRÓD 2I".

W myśl Uwagi 3.2.3 zajmiemy się systemami „i spośród 2i", przy czym będziemy rozpatrywać przypadek $i \geq 3$ (dla $i=2$ problem rozstrzyga Twierdzenie 3.I.2) . Dla tych systemów prawdziwe są fakty , których dowód jest podobny do dowodu Twierdzeń 3.2.2 i 3.2.3 .

Twierdzenie 4.I

Niech $\Pi=(\Pi(1),\dots,\Pi(2i))$. Jeżeli $\Pi(j)>\Pi(j+1)$, to

(28) $\quad Q_i^{2i}(\Pi)>Q_i^{2i}(\Pi^{(j)}) \quad$ dla $j<i$

(29) $\quad Q_i^{2i}(\Pi)<Q_i^{2i}(\Pi^{(j)}) \quad$ dla $j>i$.

Jeżeli $\Pi(j)<\Pi(j+1)$, to nierówności w (28) , (29) są odwrócone .

Twierdzenie 4.2

Niech $\Pi^*=(\Pi^*(1),\dots,\Pi^*(2i))\in\Pi$. Wtedy $Q_i^{2i}(\Pi^*)=\min\limits_{\Pi\in\Pi}(Q_i^{2i}(\Pi))$

(30) $\quad \Pi^*(1)<\Pi^*(2)<\dots<\Pi^*(i)$

(31) $\quad \Pi^*(i+1)>\Pi^*(i+2)>\dots>\Pi^*(2i)$.

Sformułujemy teraz warunek konieczny na to , by permutacja $\Pi=(\Pi(1),\dots,\Pi(2i))$ była optymalna dla systemu „i spośród 2i".

Twierdzenie 4.3

Jeżeli permutacja $\Pi=(\Pi(1),\dots,\Pi(2i))$ jest optymalna dla systemu „i spośród 2i", to nie jest spełniony żaden z warunków

(32) $\quad \Pi(1)<\Pi(2i)\wedge\Pi(2)<\Pi(2i-1)\wedge\dots\wedge\Pi(i)<\Pi(i+1)$

(33) $\quad \Pi(1)>\Pi(2i)\wedge\Pi(2)>\Pi(2i-1)\wedge\dots\wedge\Pi(i)>\Pi(i+1)$.

<u>Dowód (a contario).</u> Załóżmy , że $\Pi=(\Pi(1),\ldots,\Pi(2i))$ jest optymalna dla systemu „i spośród 2i" . Przypuśćmy , że jest spełniony warunek (32) . Dla permutacji $\Pi^{(i)}$ mamy

$$Q_i^{2i}(\Pi^{(i)}) = q_{\Pi(1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(i-1)}q_{\Pi(i+1)}+\Big[p_{\Pi(1)}q_{\Pi(2)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(i-1)}q_{\Pi(i+1)}q_{\Pi(i)}+\ldots+p_{\Pi(i-1)}q_{\Pi(i+1)}q_{\Pi(i)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(2i-\ldots}$$
$$+p_{\Pi(i+1)}q_{\Pi(i)}q_{\Pi(i+2)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(2i)}\Big] .$$

Wyrażenie w $\Big[\ \Big]$ oznaczmy przez v . Wtedy

$$Q_i^{2i}(\Pi) = q_{\Pi(1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(i-1)}q_{\Pi(i)} + v + p_{\Pi(i)}q_{\Pi(i+1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(2i)}$$

oraz

$$Q_i^{2i}(\Pi)-Q_i^{2i}(\Pi^{(i)}) = \left(q_{\Pi(i)}-q_{\Pi(i+1)}\right)\left(q_{\Pi(1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(i-1)}-q_{\Pi(i+2)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(2i)}\right) .$$

Na podstawie założenia w dowodzie mamy $q_{\Pi(1)}>q_{\Pi(2i)}$, $q_{\Pi(2)}>q_{\Pi(2i-1)}$, ... , $q_{\Pi(i-1)}>q_{\Pi(i+2)}$, $q_{\Pi(i)}>q_{\Pi(i+1)}$. Otrzymujemy stąd łatwo , że $q_{\Pi(i)}-q_{\Pi(i+1)}>0$ oraz po wymnożeniu stronami kolejnych $(i-1)$ nierówności i odpowiednim przekształceniu otrzymanej nierówności , że

$$q_{\Pi(1)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(i-1)}-q_{\Pi(i+2)}\cdot\ldots\cdot q_{\Pi(2i)} > 0 .$$

Wynika stąd , że $Q_i^{2i}(\Pi)-Q_i^{2i}(\Pi^{(i)}) > 0$, a więc Π nie jest optymalna , co daje sprzeczność . Zatem warunek (32) nie może być spełniony . Podobnie dowodzimy , że nie zachodzi (33) .

<u>Uwaga 4.1</u>

Dla systemu „i spośród 2i" otrzymujemy fakt analogiczny do Uwagi 3.2.2 .

Uwaga 4.2

Rozważmy system „3 spośród 6". Nie musimy porównywać wszystkich $6!=720$ permutacji . W myśl Uwagi 4.I weźmy wszystkie możliwe podziały $S_I=\{i_I,i_2,i_3\}$, $S_2=\{i_4,i_5,i_6\}$ zbioru $\{I,\ldots,6\}$. Na podstawie Twierdzenia 4.2 każdy podział wyznacza dokładnie jedną permutację Π^* , dla której $Q_3^6(\Pi^*) = \min_{\Pi\in\sqcap}(Q_3^6(\Pi))$ ($\sqcap$ jest klasą permutacji odpowiadającą temu podziałowi) . Na podstawie (30) ,(3I) łatwo otrzymujemy , że jeżeli permutacja Π jest optymalna , to $I\in\{\Pi(I),\Pi(6)\}$. Uwaga 2.I pozwala nam ograniczyć się do tych permutacji , dla których $\Pi(I)=I$. W rezultacie zostało nam do porównania $\binom{5}{2}=I0$ permutacji . Są to $\Pi_I=(I,2,3,6,5,4)$,$\Pi_2=(I,2,4,6,5,3)$,$\Pi_3=(I,2,5,6,4,3)$,$\Pi_4=(I,2,6,5,4,3)$,$\Pi_5=(I,3,4,6,5,4)$, $\Pi_6=(I,3,5,6,4,2)$,$\Pi_7=(I,3,6,5,4,2)$,$\Pi_8=(I,4,5,6,3,2)$,$\Pi_9=(I,4,6,5,3,2)$,$\Pi_{I0}=(I,5,6,4,3,2)$. Dalej , na podstawie Twierdzenia 4.3 zbiór rozważanych permutacji redukujemy do zbioru $\{\Pi_4,\Pi_7,\Pi_8,\Pi_9,\Pi_{I0}\}$. Okazuje się (patrz Tablica I) , że dla każdej permutacji z tego zbioru istnieją takie wartości $q_I,\ldots,q_6$, dla których jest ona optymalną permutacją rozważanego systemu . Oczywiście podobnie jest dla permutacji symetrycznych do $\Pi_4,\Pi_7,\Pi_8,\Pi_9,\Pi_{I0}$. Rozważany zbiór uzupełniony o permutacje symetryczne oznaczmy M_3 . Mamy $|M_3|=I0$.

Uwaga 4.3

Argumentując jak poprzednio , dla systemu „4 spośród 8" zbiór rozważanych permutacji ograniczymy do zbioru : { (I,2,3,8,7,6,5,4),(I,2,4,8,7,6,5,3),(I,2,5,8,7,6,5,3),(I,2,6,7,8,5,4,3),(I,2,6,8,7,5,4,3),(I,2,7,8,6,5,4,3),(I,3,4,8,7,6,5,2),(I,3,5,8,7,6,4,2),(I,3,6,7,8,5,4,2),(I,3,6,8,7,5,4,2),(I,3,7,8,6,5,4,2),(I,4,5,6,8,7,3,2),(I,4,5,7,8,6,3,2),(I,4,5,8,7,6,3,2),(I,4,6,7,8,5,3,2),(I,4,6,8,7,5,3,2),(I,4,5,7,8,6,3,2),(I,5,6,7,8,4,3,2),(I,5,6,8,7,4,3,2),(I,5,7,8,6,4,3,2),(I,6,7,8,5,4,3,2)} . Zatem $|M_4| = 2{\cdot}2I = 42$.

Niech dla $i \geqslant 3$ zbiór M_i będzie określony podobnie jak M_3 i M_4 . To znaczy - jeżeli $\pi=(\pi(I),\dots,\pi(2i))$, to

$$\pi \in M_i \Leftrightarrow (30) \wedge (3I) \wedge \sim(32) \wedge \sim(33)$$

Przypuszczenie

Niech $\pi=(\pi(I),\dots,\pi(2i))$. Jeżeli $\pi \in M_i$, to istnieją takie wartości $q_I,\dots,q_{2i} \in (0,I)$, dla których π jest optymalna dla systemu „i spośród 2i".

Uwaga 4.3

Argumentując jak poprzednio , dla systemu „4 spośród 8" zbiór rozważanych permutacji ograniczymy do zbioru : { (I,2,3,8, 7,6,5,4), (I,2,4,8,7,6,5,3), (I,2,5,8,7,6,5,3), (I,2,6,7,8,5, 4,3), (I,2,6,8,7,5,4,3), (I,2,7,8,6,5,4,3), (I,3,4,8,7,6,5,2), (I,3,5,8,7,6,4,2), (I,3,6,7,8,5,4,2), (I,3,6,8,7,5,4,2), (I,3, 7,8,6,5,4,2), (I,4,5,6,8,7,3,2), (I,4,5,7,8,6,3,2), (I,4,5,8, 7,6,3,2), (I,4,6,7,8,5,3,2), (I,4,6,8,7,5,3,2), (I,4,5,7,8,6, 3,2), (I,5,6,7,8,4,3,2), (I,5,6,8,7,4,3,2), (I,5,7,8,6,4,3,2), (I,6,7,8,5,4,3,2)} . Zatem $|M_4|$ = 2·2I = 42 .

Niech dla $i \geqslant 3$ zbiór M_i będzie określony podobnie jak M_3 i M_4 . To znaczy - jeżeli $\Pi = (\Pi(I), \ldots, \Pi(2i))$, to

$$\Pi \in M_i \Leftrightarrow (30) \wedge (3I) \wedge \sim(32) \wedge \sim(33)$$

Przypuszczenie

Niech $\Pi = (\Pi(I), \ldots, \Pi(2i))$. Jeżeli $\Pi \in M_i$, to istnieją takie wartości $q_I, \ldots, q_{2i} \in (0,I)$, dla których Π jest optymalna dla systemu „i spośród 2i".

LITERATURA

[1] C.Derman,G.J.Lieberman i S.M.Ross , On the consecutive-k-out-of-n : F system , IEEE Trans.Rel. , R-3I(I982) , 57-63 .

[2] Y.L.Tong , A rearrangement inequality for the longes run,with an application to network reliability , Journal of Applied Probability , 22(1985) , 386-393 .

[3] D.T.Chiang i S.C.Niu , Reliability of consecutive k-out-of-n , IEEE Trans.Rel. , R-30(I98I) , 87-89 .

[4] R.C.Bollinger i A.A.Salvia , K-in-a-row failure networks , IEEE Trans.Rel. , R-3I(I982) .